Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : Baccalauréat
Session : 2018
Série : D - TI
Epreuve : Mathématiques
Durée : 4h Coefficient : 4

EXERCICE 1 : /4 points

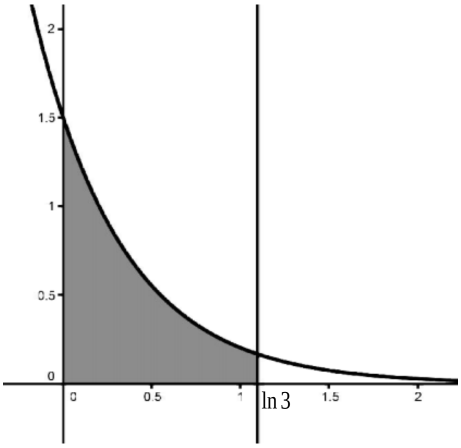
1. On considère a et b deux réels, avec a non nul.
Démontrer que les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel, sont des solutions de l'équation différentielle : $y' = ay + b$ (E). (on admettra par la suite que ce sont les seules). **1pt**

2. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.

(a) Affirmation 1 : Si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $y' + 3y = 6$, alors la courbe représentant f admet une asymptote horizontale en $+\infty$. **1pt**

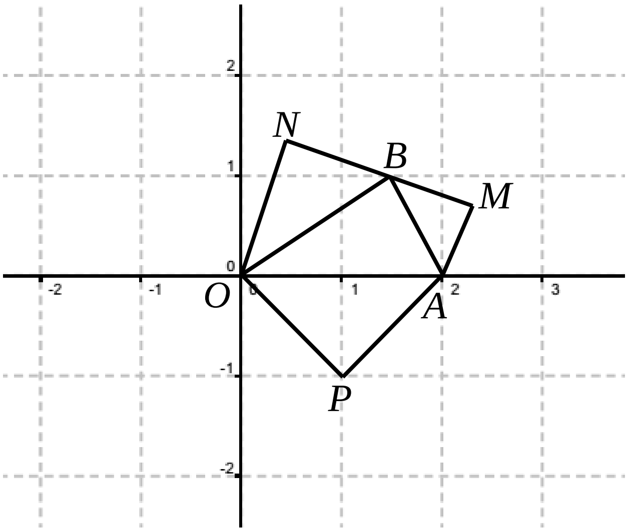
(b) Affirmation 2 : Si une fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est solution de l'équation $y' = y$, alors pour tous réels α et β,
$f(\alpha+\beta) = f(\alpha)\times f(\beta)$. **1pt**

(c) Affirmation 3 : La courbe d'une fonction solution de l'équation différentielle $y' = -2y$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $\frac{3}{2}$.
(voir figure ci-contre)
L'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \ln 3$, est $\frac{2}{3}$. **1pt**



EXERCICE 2 : /5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$.
On considère les points M, N et P tels que les triangles AMB, BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-contre.
On note S_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B.
On note S_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N.



Le but de cet exercice est de démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. Donner l'angle et le rapport de S_1 et de S_2. **2pts**
2. **(a)** En utilisant les résultats de la question 1, donner les écritures complexes de S_1 et S_2. **1pt**

   (b) En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N. **1pt**

   (c) Donner, par lecture graphique, l'affixe z_P du point P, puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires. **1pt**

PROBLEME : /11 points

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A. Etude de la fonction f et construction de la courbe (C).

1. Etudier la limite de la fonction f en $-\infty$ puis en $+\infty$ (on pourra écrire $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^{x}$). **0,5pt**
2. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ est asymptote à la courbe (C) en $-\infty$ et préciser la position de la courbe (C) par rapport à la droite Δ. **0,75pt**
3. **(a)** Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f. **0,5pt**

   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction f' en précisant les limites de la fonction f' en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,75pt**

   (c) Calculer $f'(1)$ et en déduire le signe de f' pour tout réel x. **0,75pt**

   (d) Dresser le tableau de variation de la fonction f. **0,75pt**
4. Soit I l'intervalle $[1,9;2]$. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α. **0,75pt**
5. Tracer la droite Δ et la courbe (C) (unité graphique : 2 cm). **1pt**

B. Recherche d'une approximation de α.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle I par : $g(x) = 1 + \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$.

1. Démontrer que, sur I, l'équation $f(x) = 0$ équivaut à l'équation $g(x) = x$. **0,5pt**
2. Etudier le sens de variation de la fonction g sur I et démontrer que, pour tout x appartenant à I, $g(x)$ appartient à I. **1,5pt**
3. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle I, $|g'(x)| \leq \frac{1}{9}$.
4. Soit (U_n) la suite de nombres réels définie par : $U_0 = 2$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $U_{n+1} = g(U_n)$. On déduit de la question B 2. que tous les termes de cette suite appartiennent à l'intervalle I. On ne demande pas de le démontrer.

   (a) Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{9}|U_n - \alpha|$. **0,75pt**

   (b) En déduire, en raisonnant par récurrence, que : pour tout n de $\mathbb{N}$

   $$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{9}\right)^n \times \frac{1}{10}.$$ **1pt**

   (c) En déduire que la suite (U_n) converge et préciser sa limite. **0,75pt**