

Bac Mathématiques Cameroun 2022

Série D

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

Partie A : Évaluation des ressources (13 points)

Exercice 1 (4,5 points)

- On munit le plan complexe d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points A , B et I d'affixes respectives $4 + i$, $3i$ et 1 .
 - Démontrer que IAB est un triangle rectangle isocèle de sens direct.
 - On donne le point J d'affixe i . Calculer $\frac{z_B - z_J}{z_A - z_J}$ et donner la nature du triangle ABJ .
 - Démontrer que les points I , A , B et J appartiennent à un même cercle dont on donnera l'affixe du centre et le rayon.
- Soit s la similitude directe du plan de centre A qui transforme I en B .
 - Démontrer que l'écriture complexe de s est $z' = (1 - i)z - 1 + 4i$.
 - Donner l'angle et le rapport de s .
 - En déduire l'image par s du cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 2 (4,5 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(e^x + x) - x$. Soit (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unités : 5 cm sur les axes.

- Etudier le sens des variations de f sur $[0; +\infty[$.
- Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$.
 - En déduire la limite de f en $+\infty$; puis l'existence d'une asymptote dont une équation est à préciser.
- Dresser le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.
- Déterminer une équation de la tangente (\mathcal{D}) à (\mathcal{C}) en O .
 - Tracer (\mathcal{D}) et (\mathcal{C}) .

Exercice 3 (4 points)

- Le réseau ferroviaire d'un pays compte cinq gares A , B , C , D et E , reliées de la façon suivante :

Allant de	A	A	A	B	C	C	D
à	B	C	D	C	D	E	E
Distance en centaines de km	2	6	5	3	1	3	4

- Construire un graphe pondéré associé à ce réseau, sur lequel $ABCD$ est un quadrilatère extérieur au

triangle CDE .

b. Déterminer par l'algorithme de DIJKSTRA, le plus court chemin de A à E.

2. Les droites de régression de x en y et de y en x d'une série statistique double sont respectivement données par :

$$x = 0,135y + 6,65 \text{ et } y = 6x - 38.$$

a. Déterminer les coordonnées du point moyen du nuage de cette série.

b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y , puis l'interpréter.

3. Une boîte contient 3 boules vertes, 2 boules rouges et 5 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Calculer la probabilité d'obtenir :

a. deux boules de la même couleur ;

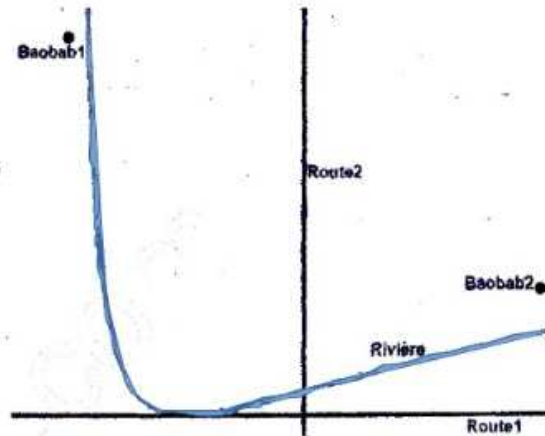
b. deux boules de couleurs différentes.

Partie B : Évaluation des compétences (7 points)

Situation

Monsieur Tanga est promoteur d'une entreprise agricole. Il a acquis nouvellement une vaste terre plane traversée par deux routes perpendiculaires et une rivière. Cette terre est surplombée par deux grands baobabs et sa vue aérienne est matérialisée par la figure ci-contre.

Sur cette terre, il projette y produire de la papaye ou de la pastèque, ou de la banane. Il soumet son projet à un conseil d'ingénieurs pour une étude de marché afin de lui présenter les atouts bénéficiaires sur chacun de ces produits.



Le conseil à la fin de cette étude basée sur un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm pour 100 m, adresse ses solutions à Tapi, un élève compétent, en stage auprès du conseil, en ces termes :

- Le bénéfice à réaliser en milliers de francs en fonction de la quantité x de papayes en tonnes par an est donné par la fonction h telle que $h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$ et dont la courbe intégrale (C_h) passe par le point $A(0 ; 15\,000)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 10 000.

- La rivière suit la courbe de la fonction numérique g définie par $g(x) = \ln(x + 1) - \frac{x}{x + 1}$; les routes 1 et 2 suivent respectivement les droites d'équations $y = 0$ et $x = 1$. Dans le repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, la rivière est tangente à la route 1 à l'origine O. La production de la pastèque n'est bénéfique que si elle se fait sur le domaine compris entre les deux routes et la rivière.

- Sur le plan complexe associé au repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, les pieds des deux baobabs sont assimilés aux points B_1 et B_2 dont les affixes respectives sont les solutions de l'équation $z^2 - (2 + 4i)z - 6 + 8i = 0$. Le domaine bénéfique à la production de bananes est délimité par l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{MB_2} = 0$.

Tâches :

1. Déterminer le bénéfice maximal annuel à réaliser par l'entreprise de Monsieur Manga s'il se lance dans la production de papayes.

2. Déterminer l'aire du domaine bénéfique à la production de pastèques.

3. Déterminer l'aire du domaine bénéfique à la production de bananes.

Bac Cameroun 2022 série D

PARTIE A : ÉVALUATION DES RESSOURCES (13 POINTS)

Exercice 1 (4,5 points)

1. On munit le plan complexe d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et on considère les points A , B et I d'affixes respectives $4 + i$, $3i$ et 1 .

1. a) Nous devons démontrer que IAB est un triangle rectangle isocèle de sens direct.

$$\begin{aligned} \frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} &= \frac{3i - 1}{4 + i - 1} \\ &= \frac{3i - 1}{3 + i} \\ &= \frac{i(3 + i)}{3 + i} \\ &= i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} = i}$$

Nous en déduisons que **le triangle IAB est rectangle isocèle en I de sens direct.**

1. b) On donne le point J d'affixe i .

Nous devons calculer $\frac{z_B - z_J}{z_A - z_J}$ et donner la nature du triangle ABJ .

$$\begin{aligned} \frac{z_B - z_J}{z_A - z_J} &= \frac{3i - i}{4 + i - i} \\ &= \frac{2i}{4} \\ &= \frac{i}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{z_B - z_J}{z_A - z_J} = \frac{1}{2}i}$$

Nous en déduisons que **le triangle ABJ est rectangle en J .**

1. c) Nous devons démontrer que les points I , A , B et J appartiennent à un même cercle dont on donnera l'affixe du centre et le rayon.

Les triangles IAB et JAB sont rectangles respectivement en I et en J .
Ils sont donc inscrits dans le même cercle de diamètre $[AB]$.

- Le centre Ω de ce cercle est le milieu du segment $[AB]$.

L'affixe de Ω est $z_\Omega = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{4 + i + 3i}{2} = \frac{4 + 4i}{2} = 2 + 2i$.

- Le rayon de ce cercle est égal à $\frac{AB}{2} = \frac{|z_B - z_A|}{2} = \frac{|3i - 4 - i|}{2} = \frac{|-4 + 2i|}{2} = |-2 + i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$.

• Par conséquent, les points I, A, B et J appartiennent à un même cercle de centre Ω d'affixe $2 + 2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2. Soit s la similitude directe du plan de centre A qui transforme I en B .

2. a) Nous devons démontrer que l'écriture complexe de s est $z' = (1 - i)z - 1 + 4i$.

Nous savons que si s une similitude directe du plan, alors il existe un unique nombre complexe $a \neq 0$ et un unique nombre complexe b tels que, pour tout point M d'affixe z et tout point M' d'affixe z' , M' est l'image de M par s si et seulement si : $z' = az + b$.

Le point A étant le centre de la symétrie s , nous avons : $A = s(A)$.

Le point B étant l'image du point I par la symétrie s , nous avons : $B = s(I)$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} \begin{cases} A = s(A) \\ B = s(I) \end{cases} &\iff \begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_B = az_I + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4 + i = a(4 + i) + b \\ 3i = a \times 1 + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 4 + i = a(4 + i) + b & (1) \\ 3i = a + b & (2) \end{cases} \\ (1) - (2) &\iff 4 + i - 3i = 4a + ia + b - a - b \\ &\iff 4 - 2i = 3a + ia \\ &\iff 4 - 2i = (3 + i)a \\ &\iff a = \frac{4 - 2i}{3 + i} = \frac{(4 - 2i)(3 - i)}{(3 + i)(3 - i)} = \frac{12 - 4i - 6i - 2}{9 + 1} \\ &= \frac{10 - 10i}{10} = \frac{10(1 - i)}{10} = 1 - i \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{a = 1 - i}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} a = 1 - i \\ 3i = a + b \end{cases} (2) &\iff \begin{cases} a = 1 - i \\ b = 3i - a \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = 1 - i \\ b = 3i - 1 + i \end{cases} \\ &\iff \boxed{\begin{cases} a = 1 - i \\ b = -1 + 4i \end{cases}} \end{aligned}$$

D'où, l'écriture complexe de s est $z' = (1 - i)z - 1 + 4i$.

2. b) Nous devons donner l'angle et le rapport de s .

• Le rapport de la similitude s est $|a| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

• Déterminons l'angle θ de la similitude s .

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{-1}{|a|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \implies \theta = -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Par conséquent, s est une similitude de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2. c) Nous devons en déduire l'image par s du cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

$$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right)$$

2. b) Nous devons en déduire la limite de f en $+\infty$; puis l'existence d'une asymptote dont une équation est à préciser.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad (\text{croissances comparées}) &\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = 1 \\ &\implies \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{e^x}\right) = \ln 1 = 0 \\ &\implies \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0} \end{aligned}$$

La courbe (C) admet une asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ d'équation $y = 0$.

3. Dressons le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = \ln(e^0 + 0) - 0 \\ \quad = \ln 1 \\ \quad = 0 \\ \\ f(1) = \ln(e^1 + 1) - 1 \\ \quad = \ln(e + 1) - 1 \\ \quad \approx 0,31 \end{array} \right.$	x	0	1	$+\infty$	
	$f'(x)$		+	0	-
	$f(x)$	0	\nearrow	$\ln(e + 1) - 1$	\searrow

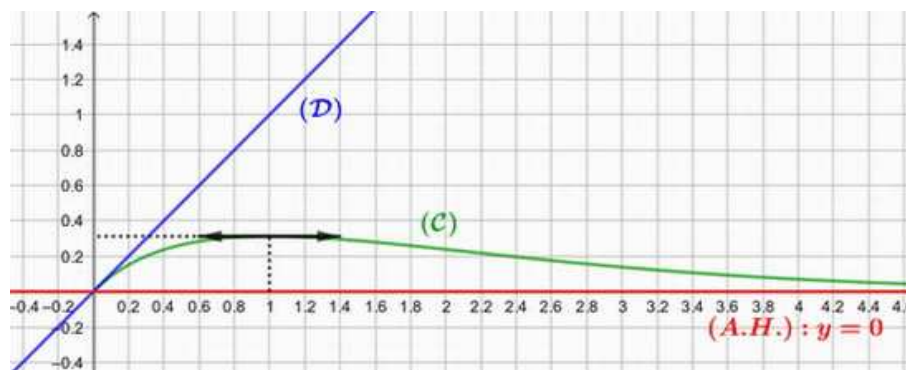
4. a) Nous devons déterminer une équation de la tangente (D) à (C) en O .

Une équation de la tangente (D) est de la forme $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit de la forme $\boxed{y = f'(0)x + f(0)}$.

$$\text{Or } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(x) = \frac{1-x}{e^x+x} \end{cases} \implies \begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases}$$

D'où une équation de la tangente (D) est $y = 1 \times x + 0$, soit $\boxed{y = x}$.

4. b) Traçons (D) et (C) .

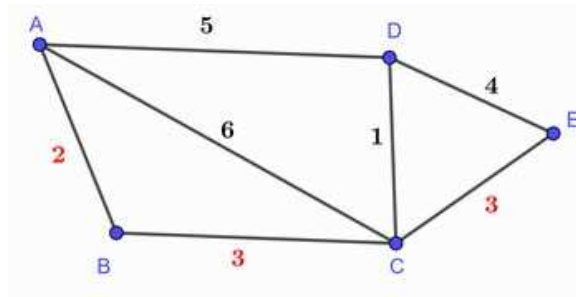


Exercice 3 (4 points)

1. Le réseau ferroviaire d'un pays compte cinq gares A, B, C, D et E, reliées de la façon suivante :

Allant de	A	A	A	B	C	C	D
à	B	C	D	C	D	E	E
Distance en centaines de km	2	6	5	3	1	3	4

1. a) Construisons un graphe pondéré associé à ce réseau, sur lequel ABCD est un quadrilatère extérieur au triangle CDE .



1. b) Déterminons par l'algorithme de DIJKSTRA, le plus court chemin de A à E.

A	B	C	D	E	Sommet sélectionné
0	∞	∞	∞	∞	A
	2_A	6_A	5_A	∞	B
		5_B	5_A	∞	C
			5_A	8_C	D
				8_C	E

D'où le chemin le plus court pour aller de A à E est A - B - C - E.
La longueur de ce trajet est de 8 km.

2. Les droites de régression de x en y et de y en x d'une série statistique double sont respectivement données par :

$$x = 0,135y + 6,65 \text{ et } y = 6x - 38.$$

2. a) Déterminons les coordonnées du point moyen du nuage de cette série.

Réolvons le système $\begin{cases} x = 0,135y + 6,65 \\ y = 6x - 38 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 0,135y + 6,65 \\ y = 6x - 38 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0,135(6x - 38) + 6,65 \\ y = 6x - 38 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0,81x - 5,13 + 6,65 \\ y = 6x - 38 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0,19x = 1,52 \\ y = 6x - 38 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 8 \\ y = 6x - 38 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = 8 \\ y = 10 \end{cases}}$$

Par conséquent, les coordonnées du point moyen du nuage de cette série sont (8 ; 10).

2. b) Déterminons le coefficient de corrélation linéaire entre x et y .

Les droites de régression de x en y et de y en x sont telles que

$$\begin{cases} x = 0,135y + 6,65 = ay + b \\ y = 6x - 38 = a'x + b' \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0,135 \\ a' = 6 \end{cases}$$

Si r est le coefficient de corrélation, nous savons que $r^2 = a \times a' = 0,135 \times 6 = 0,81 \implies (r = 0,9 \text{ ou } r = -0,9)$.

$$\text{Or } \begin{cases} a = 0,135 > 0 \\ a' = 6 > 0 \end{cases} \implies r > 0.$$

Par conséquent, $r = 0,9$.

3. Une boîte contient 3 boules vertes, 2 boules rouges et 5 boules jaunes. On tire simultanément 2 boules de la boîte et on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

3. a) Calculons la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur.

Il y a $\binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ façons différentes de tirer simultanément 2 boules parmi les 10 boules de la boîte.

- Il y a $\binom{3}{2} = 3$ façons différentes de tirer 2 boules vertes parmi les 3 boules vertes.
- Il y a une seule façon de tirer 2 boules rouges parmi les 2 boules rouges.
- Il y a $\binom{5}{2} = 10$ façons différentes de tirer 2 boules jaunes parmi les 5 boules jaunes.

Il y a donc $3 + 1 + 10 = 14$ façons différentes de tirer 2 boules de la même couleur.

Par conséquent, la probabilité d'obtenir deux boules de la même couleur est égale à $\frac{14}{45}$.

3. b) Calculons la probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes.

La probabilité d'obtenir deux boules de couleurs différentes est égale à $1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}$.

PARTIE B : ÉVALUATION DES COMPÉTENCES (7 POINTS)

1. Nous devons déterminer le bénéfice maximal annuel à réaliser par l'entreprise de Monsieur Manga s'il se lance dans la production de papayes.

Le bénéfice à réaliser en milliers de francs en fonction de la quantité x de papayes en tonnes par an est donné par la fonction h telle que $h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$ et dont la courbe intégrale (\mathcal{C}_h) passe par le point $A(0 ; 15\,000)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 10 000.

Déterminons les solutions de l'équation différentielle $h''(x) - 3h'(x) + 2h(x) = 0$.

À cette équation différentielle, nous associons l'équation caractéristique $r^2 - 3r + 2 = 0$

Réolvons cette équation caractéristique.

Discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$

Racines : $r_1 = \frac{3-1}{2} = 1$

$$r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

Puisque l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$, les solutions de

l'équation différentielles s'écrivent sous la forme : $h(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$, soit $h(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$)

- D'une part, la courbe (C_h) passe par le point $A(0; 15\,000)$
Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} h(0) = 15\,000 &\iff \alpha e^0 + \beta e^0 = 15\,000 \\ &\iff \boxed{\alpha + \beta = 15\,000} \end{aligned}$$

- D'autre part, la courbe (C_h) admet en A une tangente de coefficient directeur 10 000.

Nous en déduisons que $h'(0) = 10\,000$.

$$\begin{aligned} \text{Or } h'(x) &= (\alpha e^x + \beta e^{2x})' \\ &= \alpha e^x + 2\beta e^{2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies h'(0) &= \alpha e^0 + 2\beta e^0 \\ h'(0) &= \alpha + 2\beta \end{aligned}$$

$$\text{D'où } h'(0) = 10\,000 \iff \boxed{\alpha + 2\beta = 10\,000}$$

Dès lors,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 15\,000 & (1) \\ \alpha + 2\beta = 10\,000 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} (2) - (1) : \beta = -5\,000 \\ (1) : \alpha - 5\,000 = 15\,000 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 20\,000 \\ \beta = -5\,000 \end{cases}$$

$$\text{D'où, pour tout réel } x \text{ positif, } \boxed{h(x) = 20\,000 e^x - 5\,000 e^{2x}}$$

Étudions les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= 20\,000 e^x - 5\,000 \times 2 e^{2x} \\ &= 20\,000 e^x - 10\,000 e^{2x} \\ &= 10\,000 e^x (2 - e^x) \end{aligned}$$

Puisque $10\,000 e^x > 0$ pour tout x réel, le signe de $h'(x)$ est le signe de $(2 - e^x)$.

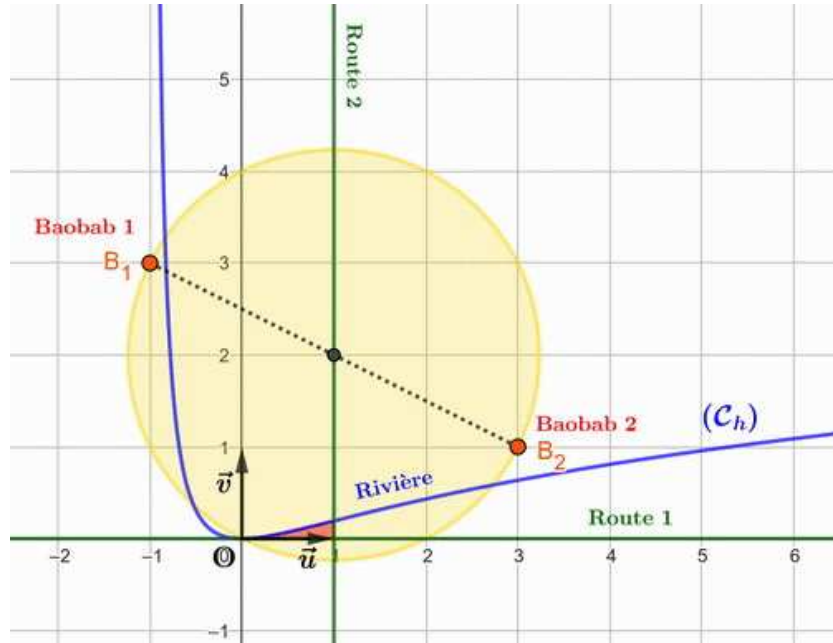
$\begin{cases} 2 - e^x < 0 &\iff e^x > 2 \\ &\iff x > \ln 2 \\ 2 - e^x = 0 &\iff x = \ln 2 \\ 2 - e^x > 0 &\iff x < \ln 2 \end{cases}$		<table style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$\ln 2$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$2 - e^x$</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$h'(x)$</td> <td style="padding: 5px;">+</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">-</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$h(x)$</td> <td style="padding: 5px;">\nearrow</td> <td style="padding: 5px;">20 000</td> <td style="padding: 5px;">\searrow</td> </tr> </table>	x	0	$\ln 2$	$+\infty$	$2 - e^x$	+	0	-	$h'(x)$	+	0	-	$h(x)$	\nearrow	20 000	\searrow
x	0	$\ln 2$	$+\infty$															
$2 - e^x$	+	0	-															
$h'(x)$	+	0	-															
$h(x)$	\nearrow	20 000	\searrow															

La fonction h admet donc un maximum égal à 20 000.

Par conséquent, **le bénéfice maximal annuel à réaliser par l'entreprise de Monsieur Manga s'élève à 20 000 000 francs.**

2. Nous devons déterminer l'aire \mathcal{A}_P du domaine bénéfique à la production de pastèques.

Le domaine fermé bénéfique à la production de pastèques est colorié en rouge dans le figure ci-dessous.



Déterminons \mathcal{A}_P en unité d'aire.

$$\mathcal{A}_P = \int_0^1 \left[\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \right] dx$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_P = \int_0^1 \ln(x+1) dx - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx}$$

- Calculons $\int_0^1 \ln(x+1) dx$ par parties

Formule de l'intégrale par parties : $\int_0^1 u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) dx.$

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) & \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v'(x) = 1 & \Rightarrow v(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Dès lors, } \int_0^1 \ln(x+1) dx &= [x \times \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x+1} \times x dx \\ &= [x \times \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \end{aligned}$$

- D'où $\mathcal{A}_P = [x \times \ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx - \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$

$$\begin{aligned} &= [x \times \ln(x+1)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx \\ &= [x \times \ln(x+1)]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x+1-1}{x+1} dx \\ &= [x \times \ln(x+1)]_0^1 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= [x \times \ln(x+1)]_0^1 - 2 \int_0^1 1 dx + 2 \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx \end{aligned}$$

$$= [x \times \ln(x+1)]_0^1 - 2[x]_0^1 + 2[\ln(x+1)]_0^1$$

$$= (\ln 2 - 0) - 2(1 - 0) + 2(\ln 2 - 0)$$

$$= 3 \ln 2 - 2$$

$$= \ln 8 - 2$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}_P = (\ln 8 - 2) \text{ u. a.}}$$

Or dans le repère, l'unité de longueur est de 1 cm pour 100 m en abscisse et 1 cm pour 100 m en ordonnée.
Donc l'unité d'aire est égale à $100 \times 100 = 10\,000 \text{ m}^2$.

Par conséquent, **l'aire du domaine bénéfique à la production de pastèques est égale à** $10\,000 (\ln 8 - 2) \text{ m}^2 \approx \boxed{794 \text{ m}^2}$

3. Nous devons déterminer l'aire \mathcal{A}_B du domaine bénéfique à la production de bananes.

- Déterminons d'abord les affixes de B_1 et B_2 , solutions de l'équation $z^2 - (2 + 4i)z - 6 + 8i = 0$.

Résolvons donc l'équation $z^2 - (2 + 4i)z - 6 + 8i = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Discriminant} : \Delta &= [-(2 + 4i)]^2 - 4 \times 1 \times (-6 + 8i) \\ &= 4 + 16i - 16 + 24 - 32i \\ &= 12 - 16i \\ &= 16 - 16i - 4 \\ &= (4 - 2i)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Racines} : z_1 = \frac{2 + 4i - (4 - 2i)}{2} = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i$$

$$z_2 = \frac{2 + 4i + (4 - 2i)}{2} = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i$$

D'où l'affixe de B_1 est $-1 + 3i$ et l'affixe de B_2 est $3 + i$.

- Déterminons ensuite l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{MB_2} = 0$.

Soit le point I , milieu du segment $[B_1 B_2]$.
Dans ce cas, nous savons que : $\overrightarrow{IB_2} = -\overrightarrow{IB_1}$.

Dès lors,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{MB_2} = 0 &\iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB_1}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB_2}) = 0 \\ &\iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB_1}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB_1}) = 0 \\ &\iff \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IB_1}^2 = 0 \\ &\iff MI^2 - IB_1^2 = 0 \\ &\iff MI^2 = IB_1^2 \\ &\iff MI = IB_1 \end{aligned}$$

Donc la distance des points M au point I est une constante et est égale à IB_1 .

Les points M sont situés sur un cercle de centre I et de rayon IB_1 .

Par conséquent, **l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MB_1} \cdot \overrightarrow{MB_2} = 0$ est le cercle de centre I et de rayon IB_1 , c'est-à-dire le cercle de diamètre $[B_1 B_2]$.**

Le rayon de ce cercle est donné par :

$$\begin{aligned} IB_1 &= \frac{1}{2} B_1 B_2 = \frac{1}{2} |z_2 - z_1| \\ &= \frac{1}{2} |3 + i + 1 - 3i| \\ &= \frac{1}{2} |4 - 2i| \\ &= |2 - i| \end{aligned}$$

$$= \sqrt{4+1}$$

$$= \sqrt{5}$$

Donc le rayon du cercle est égal à $\sqrt{5}$.

- Déterminons enfin l'aire \mathcal{A}_B en unité d'aire du disque délimité par ce cercle.

$$\mathcal{A}_B = \pi \times (\sqrt{5})^2 = 5\pi \implies \boxed{\mathcal{A}_B = 5\pi \text{ u. a.}}$$

Or dans le repère, l'unité de longueur est de 1 cm pour 100 m en abscisse et 1 cm pour 100 m en ordonnée.
Donc l'unité d'aire est égale à $100 \times 100 = 10\,000 \text{ m}^2$.

Par conséquent, **l'aire du domaine bénéfique à la production de bananes est égale à $10\,000 \times 5\pi \text{ m}^2 = 50\,000\pi \text{ m}^2 \approx$**