

L'épreuve comporte deux exercices et un problème sur deux pages.

EXERCICE 1 : Série C uniquement 5 points

Soit p un entier relatif. On pose $a = 4p + 3$ et $b = 5p + 1$. Soit (E) l'équation $87x + 31y = 2$ dans \mathbb{Z}^2 . On désigne par (\mathcal{D}) la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. (a) En utilisant l'égalité de Bézout, démontrer que a et b sont premiers entre eux. **1pt**
(b) En déduire que 87 et 31 sont premiers entre eux. **0,75pt**
(c) Trouver un couple (u_0, v_0) d'entiers relatifs tels que $87u_0 + 31v_0 = 2$. **0,75pt**
2. Utiliser les questions précédentes pour résoudre (E) . **1,25pt**
3. Déterminer les points de (\mathcal{D}) dont les coordonnées (x, y) vérifient les deux conditions suivantes :
(i) x et y sont des entiers naturels
(ii) $0 \leq x \leq 100$. **1,25pt**

Indication : On pourra remarquer que $M(x, y)$ appartient à (\mathcal{D}) si, et seulement si, $(x, -y)$ est solution de (E) .

EXERCICE 1 : Série E uniquement 5 points

Un test de recrutement dans une entreprise est constitué de 5 questions. Pour chaque candidat, on attribue +2 points pour une réponse juste et -2 points pour une réponse fausse ou non donnée. On note n le nombre de réponses justes données par un candidat.

1. (a) Montrer que la note N d'un candidat à la fin du test est : $N = 4n - 10$. **1pt**
(b) En déduire l'ensemble des notes possibles qu'un candidat à ce test peut avoir. **1pt**
2. Le candidat Eya trouve les réponses exactes des deux premières questions. Il répond au hasard aux trois dernières questions. On admet que sa réponse est juste avec la probabilité de $\frac{1}{3}$ et pour tout autre candidat la probabilité de donner une réponse juste à une des cinq questions est de $\frac{1}{2}$.
(a) Déterminer l'ensemble des notes que Eya peut avoir à la fin du test. **1pt**
(b) Pour être admis à l'école, un candidat doit obtenir à l'issue du test une note supérieure ou égale 6. Quelle est la probabilité pour que :
A : « Eya réussisse au test » **1pt**
B : « Un candidat autre que Eya réussisse au test » **1pt**

EXERCICE 2 : 5 points

L'espace orienté est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points : $A(2, 0, 1)$, $B(3, -2, 0)$ et $C(2, 8, -4)$.

1. Soit $M(x, y, z)$ un point. Exprimer en fonction de x, y et z les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$. **1pt**
2. Résoudre le système $\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$. On fera figurer les étapes de la résolution sur la copie **1pt**
3. Démontrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées de N . **1pt**

4. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{B} h$ où \mathcal{B} représente l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.

(a) Le point N étant défini à la question précédente, montrer que le volume du tétraèdre

$ABCN$ est égal à $\frac{1}{6} CN^2$. **1pt**

(b) Calculer l'aire du triangle ABC . **0,5pt**

(c) Utiliser les résultats précédents pour calculer la distance du point N au plan (ABC) . **0,5pt**

PROBLEME : 10 points

PARTIE A

1. (a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(E): z^2 - 3z + 4 = 0$. **0,75pt**

(b) Déterminer le module de chaque racine de cette équation.

2. Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. z désigne un nombre complexe non nul de partie imaginaire positive. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $1, z$ et z^2 et on note S le système de points pondérés $\{(A, 4), (B, -3), (C, 1)\}$. Ce système est tel que O est son barycentre.

(a) Démontrer que z est solution de (E) . **0,5pt**

(b) En déduire les coordonnées de B et C . **0,5pt**

3. (a) k désignant un nombre réel, on pose $z = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$. Préciser suivant les valeurs de k l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $4MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = k$. **1pt**

(b) On suppose $k = 89$. Donner alors une équation cartésienne de (Γ) , puis tracer (Γ) . **0,5pt**

PARTIE B

On considère l'équation différentielle $(E'): y'' + 4y' + 4y = 0$ et les fonctions f et g , de la variable réelle x définie respectivement par :

$$f(x) = xe^{-2x} + x - \frac{5}{4} \ln 2 \quad \text{et} \quad g(x) = 1 + (-2x + 1)e^{-2x}.$$

On note (C_f) la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité de longueur sur les axes : 2cm).

1. (a) Dresser le tableau de variation de g . **0,5pt**

(b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x . **0,25pt**

2. (a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, puis la dérivée de f . **0,75pt**

(b) Dresser le tableau de variation de f . **0,5pt**

3. (a) Calculer $f(\ln 2)$. **0,25pt**

(b) Démontrer que la droite (\mathcal{D}) d'équation $y = x - \frac{5}{4} \ln 2$ est asymptote à (C_f) . Etudier la position de la courbe (C_f) par rapport à la droite (\mathcal{D}) . Tracer (\mathcal{D}) et (C_f) . **1,25pt**

4. (a) Déterminer la forme générale des solutions de (E') . **0,5pt**

(b) Déterminer la solution de (E') dont la courbe admet une tangente en O parallèle à la droite d'équation $y = x + 1$. **0,5pt**

(c) Démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 4x - 5 \ln 2 + 4$. **0,5pt**

5. Soit λ un réel strictement positif et (D_λ) la partie du plan comprise entre les droites d'équations respectives $x = 0, x = \lambda, y = x - \frac{5}{4} \ln 2$ et la courbe (C_f) .

(a) En utilisant une intégration par parties, calculer, en cm^2 , l'aire de (D_λ) en fonction de λ . **0,5pt**

(b) Calculer la limite de cette aire lorsque λ tend vers $+\infty$. **0,5pt**