Bac Mathématiques

Cameroun 2023

Série A-ABI

Durée : 2h
Coefficient : 2

Partie A : Évaluation des resources (15 points)

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, quatre réponses vous sont proposées. Recopier le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la bonne réponse.

1. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ est :

a) $\{(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;1)\}$; **b)** $\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{3}\,;1\}$; **c)** $\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;-1\}$; **d)** $\{-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;1\}$. **1pt**

2. Les nombres réels solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $e^x + 8e^{-x} - 6 = 0$ sont :

a) $-ln2$ et $2ln2$; **b)** $ln2$ et $2ln2$; **c)** $ln2$ et $-2ln2$; **d)** $-ln2$ et $-2ln2$. **1pt**

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ln^3x - ln^2x - 22lnx + 40 = 0$ est :

a) $\{e^{-5}\,;\,e^{-2}\,;e^{4}\}$; **b)** $\{e^{-5}\,;\,e^{2}\,;e^{-4}\}$; **c)** $\{e^{-5}\,;\,e^{2}\,;e^{4}\}$; **d)** $\{e^{5}\,;\,e^{2}\,;e^{4}\}$. **1pt**

4. L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $e^{2x} + 2e^x - 15 \geq 0$ est :

a) $]ln3\,;\,+\infty[$; **b)** $[ln3\,;\,+\infty[$; **c)** $]-\infty\,;ln3]$; **d)** $]-\infty\,;ln3[$. **1pt**

Exercice 2 (6 points)

Le tableau suivant donne le relevé pendant huit semaines successives, du nombre de cas déclarés lors d'une épidémie.

Semaine (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de cas déclarés (y_i)	25	44	54	65	75	80	90	95

1. Représenter graphiquement le nuage de points $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal. Prendre 1 cm pour 1 semaine en abscisses et 1 cm pour 10 cas déclarés en ordonnées. **2,5pts**

2. Calculer les coordonnées $(\bar{x} ; \bar{y})$ du point moyen G de cette série statistique. **0,5pt**

3. On subdivise cette série statistique en deux sous-séries (S_1) et (S_2) constituées respectivement par les quatre premiers points et les quatre derniers points du nuage de points $(x_i ; y_i)$

a) Déterminer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des séries statistiques (S_1) et (S_2) respectivement. **1pt**

b) Vérifier qu'une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer est : $y = 9{,}5x + 23{,}25$. **0,5pt**

c) En supposant que l'évolution de cette épidémie suit l'ajustement précédent, déterminer à l'unité près, l'estimation du nombre de cas déclarés à la semaine 15. **0,5pt**

4. Parmi les 25 cas déclarés la première semaine, il y a 15 hommes et 10 femmes. On choisit au hasard et simultanément 10 cas déclarés pour constituer le groupe sur lequel sera testé un traitement. Déterminer la probabilité pour que six hommes exactement fassent partie de ce groupe. **1pt**

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2-x-8}{x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Calculer la limite de la fonction f en $-\infty$, $+\infty$, -2^- et -2^+. **1pt**

2. a) Montrer que pour tout réel $x \in]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2+4x+6}{(x+2)^2}$. **0,75pt**

b) Justifier que $x^2 + 4x + 6 > 0$ pour tout réel x. **0,25pt**

c) En déduire le signe de $f'(x)$ et le sens de variations de f sur $]-\infty ; -2[$ et sur $]-2 ; +\infty[$. **1pt**

3. Calculer $f(0)$ puis en déduire les coordonnées du point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées. **0,5pt**

4. Montrer que pour tout réel $x \in]-\infty ; -2[\cup]-2 ; +\infty[$, $f(x) = x - 3 - \frac{2}{x+2}$ **0,75pt**

5. Soit F la fonction définie sur $]-2 ; +\infty[$ par $F(x) = \frac{x^2}{2} - 3x - 2ln(x+2)$.
Montrer que F est une primitive de f sur $]-2 ; +\infty[$. **0,75pt**

Partie B : Évaluation des compétences (5 points)

Situation :

Pour réaliser le carrelage du sol de sa maison, ETAH a identifié un modèle de carreaux vitrifiés de dimensions 30×60 dont le m^2 à ce moment coûtait $8\,000$ FCFA. Mais après les difficultés liées à la pandémie de la COVID 19, le prix du m^2 de ce modèle de carreaux vitrifiés a subi deux hausses successives d'un même taux et coûte maintenant 9680 FCFA cependant, le vendeur a refusé de communiquer ce taux à ETAH. Dans le même temps, le m^2 d'un modèle de carreaux fleuris de dimensions 30×30 qui coûtait 6000 FCFA a subi une seule hausse du même taux.

Sur les conseils de son technicien, ETAH a finalement décidé d'acheter les deux modèles de carreaux à des prix qu'il a négociés avec le vendeur. Mais n'ayant pas assez d'argent, il a effectué ses achats en deux fois. La première fois, il a acheté $30\ m^2$ de carreaux vitrifiés et $20\ m^2$ de carreaux fleuris pour une dépense totale de $415\,000$ FCFA. La deuxième fois, il a acheté aux mêmes prix, $25\ m^2$ de carreaux vitrifiés et $12\ m^2$ de carreaux fleuris pour une dépense totale de $315\,500$ FCFA. Le voisin de ETAH, intéressé par les mêmes modèles de carreaux voudrait se renseigner des prix d'achat obtenus auprès de lui. Mais en l'absence de ETAH, il n'a pas pu avoir ces informations.

Pour la réalisation des travaux d'électrification, le devis de l'électricien compte 50 pièces de matériels constitués d'interrupteurs, de prises et d'ampoules économiques. Il s'est renseigné sur les prix de ces matériels dans deux magasins différents. Le premier magasin lui propose un interrupteur à 1000 FCFA, une prise à 800 FCFA et une ampoule économique à 900 FCFA pour un montant total de $45\,500$ FCFA. Le deuxième magasin lui propose un interrupteur à 1000 FCFA, une prise à 700 FCFA et une ampoule économique 800 pour un montant total $42\,500$ FCFA. Malheureusement, ETAH a égaré le devis de l'électricien.

Tâches :

1. Déterminer le prix du m^2 de carreaux fleuris après la hausse. **1,5pt**

2. Déterminer le prix d'achat du m^2 de carreaux vitrifiés et le prix d'achat du m^2 de carreaux fleuris que ETAH a négociés avec le vendeur. **1,5pt**

3. Déterminer le nombre d'interrupteurs, le nombre de prises et le nombre d'ampoules économiques compris dans le devis de l'électricien. **1,5pt**

Présentation : **0,5pt**

Correction

Bac Cameroun 2023 série A-ABI

Partie A : Évaluation des ressources (15 points)

Exercice 1 (4 points)

1. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ est $\{-\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{2}\ ;\ 1\}$. **Réponse d.**

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 &\iff (x^3 - x^2) - (2x - 2) = 0 \\ &\iff x^2(x-1) - 2(x-1) = 0 \\ &\iff (x-1)(x^2-2) = 0 \\ &\iff x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - 2 = 0 \\ &\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 2 \\ &\iff \boxed{x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Par conséquent, **la proposition** $\boxed{\text{d}}$ **est correcte.**

2. Les nombres réels solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\mathrm{e}^x + 8\mathrm{e}^{-x} - 6 = 0$ sont $\ln 2$ et $2\ln 2$. **Réponse b.**

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + 8\mathrm{e}^{-x} - 6 = 0 &\iff \mathrm{e}^x + \frac{8}{\mathrm{e}^x} - 6 = 0 \\ &\iff \frac{(\mathrm{e}^x)^2 + 8 - 6\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 0 \\ &\iff (\mathrm{e}^x)^2 + 8 - 6\mathrm{e}^x = 0 \\ &\iff (\mathrm{e}^x)^2 - 6\mathrm{e}^x + 8 = 0 \end{aligned}$$

Si $X = \mathrm{e}^x$, l'équation devient : $X^2 - 6X + 8 = 0$
Le discriminant du trinôme est égal à $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8 = 36 - 32 = 4 > 0$.

Les solutions de cette équation sont :

- $X_1 = \dfrac{6 - \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6-2}{2} = 2$
- $X_2 = \dfrac{6 + \sqrt{4}}{2} = \dfrac{6+2}{2} = 4$

Dès lors,

- $X = 2 \iff \mathrm{e}^x = 2 \iff \boxed{x = \ln 2}$
- $X = 4 \iff \mathrm{e}^x = 4 \iff x = \ln 4 = \ln 2^2 \iff \boxed{x = 2\ln 2}$

Par conséquent, **la proposition** $\boxed{\text{b}}$ **est correcte.**

3. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $\ln^3 x - \ln^2 x - 22\ln x + 40 = 0$ est $\{\mathrm{e}^{-5}\ ;\ \mathrm{e}^2\ ;\ \mathrm{e}^4\}$. **Réponse c.**

Si $X = \ln x$, l'équation devient : $X^3 - X^2 - 22X + 40 = 0$
Parmi les diviseurs de 40, le nombre entier 2 est une solution évidente de l'équation $X^3 - X^2 - 22X + 40 = 0$

En effet, $2^3 - 2^2 - 22 \times 2 + 40 = 8 - 4 - 44 + 40 = 0$.
Dès lors, $X^3 - X^2 - 22X + 40$ peut se factoriser par $(X - 2)$.
Par la règle de Horner, nous obtenons :

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -1 & -22 & 40 \\ \hline 2 & & 2 & 2 & -40 \\ \hline & 1 & 1 & -20 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } X^3 - X^2 - 22X + 40 = 0 &\iff (X-2)(X^2 + X - 20) = 0 \\ &\iff X - 2 = 0 \quad \text{ou} \quad X^2 + X - 20 = 0 \end{aligned}$$

- $X - 2 = 0 \iff \boxed{X = 2}$

- $X^2 + X - 20 = 0$

  Discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-20) = 1 + 80 = 81 > 0$

  Solutions : $X_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{81}}{2} = \dfrac{-1-9}{2} \implies \boxed{X_1 = -5}$

  $X_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{81}}{2} = \dfrac{-1+9}{2} \implies \boxed{X_2 = 4}$

Dès lors,

- $X = 2 \iff \ln x = 2$
  $\iff \boxed{x = \mathrm{e}^2}$

- $X = -5 \iff \ln x = -5$
  $\iff \boxed{x = \mathrm{e}^{-5}}$

- $X = 4 \iff \ln x = 4$
  $\iff \boxed{x = \mathrm{e}^4}$

Par conséquent, **la proposition** $\boxed{\textbf{c}}$ **est correcte.**

4. L'ensemble solution dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation : $\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 15 \geqslant 0$ est $[\,\ln 3\,;\,+\infty\,[$. **Réponse b.**

Si $X = \mathrm{e}^x$, l'inéquation devient : $X^2 + 2X - 15 \geqslant 0$

Factorisons le trinôme du second degré $X^2 + 2X - 15$.

Le discriminant du trinôme est égal à $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 4 + 60 = 64 > 0$.
Les racines du trinôme sont :

- $X_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-2-8}{2} = -5$

- $X_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-2+8}{2} = 3$

D'où $X^2 + 2X - 15 = (X + 5)(X - 3)$.

Dès lors, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 15 \geqslant 0 &\iff X^2 + 2X - 15 \geqslant 0 \\ &\iff (X+5)(X-3) \geqslant 0 \end{aligned}$$

$$\iff (e^x+5)(e^x-3) \geqslant 0$$
$$\iff e^x - 3 \geqslant 0 \qquad \text{car } e^x > 0 \Longrightarrow e^x + 5 > 0$$
$$\iff e^x \geqslant 3$$
$$\iff \ln(e^x) \geqslant \ln 3 \qquad \text{car ln est une fonction croissante sur } \mathbb{R}_+^*$$
$$\iff x \geqslant \ln 3$$

D'où $\boxed{e^{2x} + 2e^x - 15 \geqslant 0 \iff x \geqslant \ln 3}$

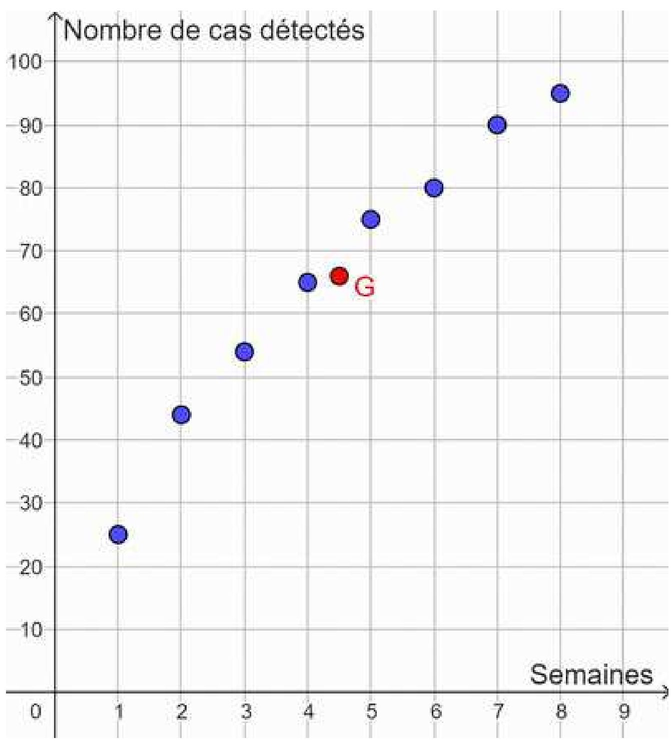
Par conséquent, **la proposition** $\boxed{\textbf{b}}$ **est correcte.**

Exercice 2 (6 points)

Le tableau suivant donne le relevé pendant huit semaines consécutives, du nombre de cas déclarés lors d'une épidémie.

Semaine (x_i)	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de cas déclarés (y_i)	25	44	54	65	75	80	90	95

1. Représentons le nuage de points de la série $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.



2. Calculons les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ puis plaçons le point moyen G du nuage de points.

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8} = \dfrac{36}{8} \\ \\ \overline{y} = \dfrac{25+44+54+65+75+80+90+95}{8} = \dfrac{528}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x} = 4,5 \\ \\ \overline{y} = 66 \end{cases}$$

Les coordonnées du point moyen G sont donc : $\boxed{G\,(4,5\,;\,66)}$

Plaçons le point moyen G du nuage de points (voir graphique : question **1.**)

3. On subdivise cette série statistique en deux sous-séries (S_1) et (S_2) constituées respectivement par les quatre premiers points et les quatre derniers points du nuage de points $(x_i\,;\,y_i)$.

3. a) Déterminons les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des séries statistiques (S_1) et (S_2) respectivement.

$$\begin{cases} \overline{x}_1 = \dfrac{1+2+3+4}{4} = \dfrac{10}{4} \\ \\ \overline{y}_1 = \dfrac{25+44+54+65}{4} = \dfrac{188}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x}_1 = 2,5 \\ \\ \overline{y}_1 = 47 \end{cases}$$

Les coordonnées du point moyen G_1 sont donc : $\boxed{G_1\,(2,5\,;\,47)}$

$$\begin{cases} \overline{x}_2 = \dfrac{5+6+7+8}{4} = \dfrac{26}{4} \\ \\ \overline{y}_2 = \dfrac{75+80+90+95}{4} = \dfrac{340}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \overline{x}_2 = 6,5 \\ \\ \overline{y}_2 = 85 \end{cases}$$

Les coordonnées du point moyen G_2 sont donc : $\boxed{G_2\,(6,5\,;\,85)}$

3. b) Vérifions qu'une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer est : $y = 9,5x + 23,25$.

La droite de Mayer admet une équation de la forme $y = ax + b$.
Cette droite passe par les deux points moyens $G_1\,(2,5\,;\,47)$ et $G_2\,(6,5\,;\,85)$.

Remplaçons y et x par les coordonnées des deux points.
Nous obtenons ainsi :

$(1)\ :\ 47 = a \times 2,5 + b$

$(2)\ :\ 85 = a \times 6,5 + b$

Pour déterminer la valeur de $''a''$, il suffit de soustraire (1) de (2).

$$\begin{aligned} 85 - 47 = 6,5a - 2,5a + b - b \quad &\iff \quad 38 = 4a \\ &\iff \quad a = 9,5 \end{aligned}$$

Pour déterminer la valeur de $''b''$, il suffit de remplacer $''a''$ par 9,5 dans l'équation (1) .

$$\begin{aligned} 47 = 9,5 \times 2,5 + b \quad &\iff \quad 47 = 23,75 + b \\ &\iff \quad 47 - 23,75 = b \\ &\iff \quad b = 23,25 \end{aligned}$$

Par conséquent, **une équation de la droite d'ajustement par la méthode de Mayer est :** $y = 9,5x + 23,25$.

3. c) Nous devons estimer à l'unité près, le nombre de cas déclarés à la semaine 15.
Dans l'équation de la droite de Mayer, remplaçons x par 15 et calculons la valeur de y .

$9,5 \times 15 + 23,25 = 165,75$.

Par conséquent, **selon ce modèle, le nombre de cas déclarés à la semaine 15 est estimé à 166 cas.**

4. Parmi les 25 cas déclarés la première semaine, il y a 15 hommes et 10 femmes. On choisit au hasard et simultanément 10 cas déclarés pour constituer le groupe sur lequel sera testé un traitement.
Nous devons déterminer la probabilité pour que six hommes exactement fassent partie de ce groupe.

Les choix des personnes sont équiprobables.
Le nombre de groupes de 10 personnes choisies parmi 25 s'élève à $\binom{25}{10} = 3\,268\,760$.

Il y a $\binom{15}{6} = 5\,005$ groupes de 6 hommes parmi les 15 hommes et $\binom{10}{4} = 210$ groupes de 4 femmes parmi les 15 hommes.

La probabilité pour que six hommes exactement fassent partie de ce groupe est donc égale à $\dfrac{5\,005 \times 210}{3\,268\,760} \approx 0,321$.

Exercice 3 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2-x-8}{x+2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i},\vec{j})$.

1. Nous devons déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$, $+\infty$, -2^- et -2^+.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x-8}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x-8}{x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-} (x^2-x-8) = 4+2-8 = -2 \\ \lim\limits_{x\to-2^-} (x+2) = 0^- \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{x^2-x-8}{x+2} = +\infty$
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^+} (x^2-x-8) = 4+2-8 = -2 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} (x+2) = 0^+ \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{x^2-x-8}{x+2} = -\infty$

En résumé, $\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty \\ \bullet\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty \end{array}}$

2. a) Déterminons l'expression algébrique de $f'(x)$ pour tout x dans l'ensemble $]-\infty\,;\,-2[\cup]-2\,;\,+\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{x^2-x-8}{x+2}\right)' &= \frac{(x^2-x-8)' \times (x+2) - (x^2-x-8) \times (x+2)'}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(2x-1)\times(x+2) - (x^2-x-8)\times 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(2x^2+4x-x-2)-(x^2-x-8)}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2+3x-2-x^2+x+8}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2+4x+6}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\forall\, x \in]-\infty\,;\,-2\,[\,\cup\,]-2\,;\,+\infty[,\ f'(x) = \frac{x^2+4x+6}{(x+2)^2}}$$

2. b) Montrons que $x^2 + 4x + 6 > 0$ pour tout réel x .

Le discriminant du trinôme $x^2 + 4x + 6$ est égal à $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 6 = 16 - 24 = -8 < 0$.

Puisque ce discriminant est strictement négatif, le trinôme est du signe du coefficient principal pour tout x réel.
Par conséquent, $x^2 + 4x + 6 > 0$ pour tout réel x .

2. c) Nous venons de montrer que $x^2 + 4x + 6 > 0$ pour tout réel x .
De plus, $(x + 2)^2 > 0$ pour tout réel $x \in] - \infty\ ;\ -2[\ \cup\ ] - 2\ ;\ +\infty[$.
Par conséquent, $f'(x) > 0$ pour tout $x \in] - \infty\ ;\ -2[\ \cup\ ] - 2\ ;\ +\infty[$.

Nous en déduisons que la fonction f est strictement croissante sur $] - \infty\ ;\ -2[\cup] - 2\ ;\ +\infty[$.

3. $f(0) = \dfrac{-8}{2} \implies \boxed{f(0 = -4}$
D'où les coordonnées du point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées sont $\boxed{(0; 4).}$

4. Montrons que pour tout réel $x \in] - \infty\ ;\ -2[\cup] - 2\ ;\ +\infty[, f(x) = x - 3 - \dfrac{2}{x+2}$.

$$\begin{aligned} x - 3 - \frac{2}{x+2} &= \frac{(x-3)(x+2) - 2}{x+2} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 3x - 6 - 2}{x+2} \\ &= \frac{x^2 - x - 80}{x+2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Donc pour tout réel $x \in] - \infty\ ;\ -2[\cup] - 2\ ;\ +\infty[, f(x) = x - 3 - \dfrac{2}{x+2}$.

5. Soit F la fonction définie sur $] - 2\ ;\ +\infty[$ par $F(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x - 2\ln(x + 2)$.
Montrons que F est une primitive de f sur $] - 2\ ;\ +\infty[$.

F est dérivable sur $] - 2\ ;\ +\infty[$ (somme de fonctions dérivables sur $] - 2\ ;\ +\infty[$).

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(\frac{x^2}{2} - 3x - 2\ln(x+2)\right)' \\ &= \frac{1}{2} \times 2x - 3 - 2 \times \frac{1}{x+2} \\ &= x - 3 - \frac{2}{x+2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$\implies \boxed{\forall\, x \in] - 2\ ;\ +\infty[,\ F'(x) = f(x)}$

Par conséquent, **F est une primitive de f sur** $] - 2\ ;\ +\infty[$.

Partie B : Évaluation des compétences (5 points)

1. Déterminons le prix au m^2 de carreaux fleuris après la hausse.

Soit x le taux en pourcentage, de chaque hausse de prix.
Le prix initial du m^2 des carreaux vitrifiés est de 8 000 FCFA.
Après une double augmentation de x %, le prix du m^2 s'élève à 9 680 FCFA.

Nous obtenons alors la relation : $9\,680 = (1 + \dfrac{x}{100}) \times (1 + \dfrac{x}{100}) \times 8\,000$.

Résolvons cette équation.

$$9\,680 = 8\,000\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 \iff 9\,680 = 8\,000(1+\frac{2x}{100}+\frac{x^2}{10\,000})$$
$$\iff \frac{9\,680}{8\,000} = 1+\frac{2x}{100}+\frac{x^2}{10\,000}$$
$$\iff 1,21 = 1+\frac{2x}{100}+\frac{x^2}{10\,000}$$

$$\iff 12\,100 = 10\,000 + 200x + x^2$$

$$\iff x^2 + 200x - 2\,100 = 0$$

Résolvons l'équation $x^2 + 200x - 2\,100 = 0$.

Discriminant de $x^2 + 200x - 2\,100$: $\Delta = 200^2 - 4\times 1\times(-2\,100) = 40\,000 + 8\,400 = 48\,400 > 0$
Solutions de l'équation :

- $x_1 = \dfrac{-200-\sqrt{48\,400}}{2} = \dfrac{-200-220}{2} = -210$
- $x_2 = \dfrac{-200+\sqrt{48\,400}}{2} = \dfrac{-200+220}{2} = 10$

Puisque $x > 0$, la seule valeur acceptable est $x = 10$.

Le taux d'augmentation des tarifs est identique lors de chaque augmentation et ce, pour chaque modèle de carrelage.
Le prix initial du m^2 des carreaux fleuris est de 6 000 FCFA.
Après une augmentation de 10 %, le prix en FCFA sera égal à $6\,000\times(1+\dfrac{10}{100}) = 6\,000\times(1+0,10) = 6\,000\times 1,1 = 6\,600$.

D'où **le prix au m^2 de carreaux fleuris après la hausse s'élèvera à 6 600 FCFA.**

2. Déterminons le prix d'achat du m^2 de carreaux de chaque modèle après la négociation avec le vendeur.

Soient x et y les prix d'achat du m^2 respectivement de carreaux vitrifiés et des carreaux fleuris.
Lors du premier achat, ETAH a acheté 30 m^2 de carreaux vitrifiés et 20 m^2 de carreaux fleuris pour une dépense totale de 41 5000 FCFA.

Nous obtenons donc la relation $30x + 20y = 41\,5000$.

Lors du second achat, ETAH a acheté 25 m^2 de carreaux vitrifiés et 12 m^2 de carreaux fleuris pour une dépense totale de 315 500 FCFA.

Nous obtenons donc la relation $25x + 12y = 315\,500$.

Le couple $(x\ ;\ y)$ est la solution du système $\begin{cases}30x+20y = 415\,000\\ 25x+12y = 315\,500\end{cases}$

$$\begin{cases}30x+20y = 415\,000\\ 25x+12y = 315\,500\end{cases} \iff \begin{cases}90x+60y = 1\,245\,000 & (1)\\ 125x+60y = 1\,577\,500 & (2)\end{cases}$$

$(2)-(1) : 35x = 332\,500 \implies x = 9\,500$

$$\begin{cases}x = 9\,500\\ 30x+20y = 415\,000\end{cases} \implies \begin{cases}x = 9\,500\\ 30\times 9\,500+20y = 415\,000\end{cases}$$
$$\implies \begin{cases}x = 9\,500\\ 285\,000+20y = 415\,000\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 9\,500 \\ 20y = 130\,000 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} x = 9\,500 \\ y = 6\,500 \end{cases}}$$

En conséquence, **le m^2 de carreaux vitrifiés coûte 9 500 FCFA et le m^2 de carreaux fleuris coûte 6 500 FCFA.**

3. Soient x, y et z respectivement les nombres d'interrupteurs, de prises et d'ampoules économiques.
Le devis de l'électricien compte 50 pièces de matériel.

Nous obtenons ainsi la relation $x + y + z = 50$.

Le premier devis propose un montant total de 45 500 FCFA pour tout le matériel à 1 000 FCFA par interrupteur, 800 FCFA par prise et 900 FCFA par ampoule économique.
Nous obtenons ainsi la relation $1\,000x + 800y + 900z = 45\,500$.

Le deuxième devis propose un montant total de 42 500 FCFA pour tout le matériel à 1 000 FCFA par interrupteur, 700 FCFA par prise et 800 FCFA par ampoule économique.
Nous obtenons la relation $1\,000x + 700y + 800z = 42\,500$.

Déterminons x, y et z en résolvant le système : $\begin{cases} x + y + z = 50 \\ 1\,000x + 800y + 900z = 455\,00 \\ 1\,000x + 700y + 800z = 42\,500 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y + z = 50 \\ 1\,000x + 800y + 900z = 45\,500 \\ 1\,000x + 700y + 800z = 42\,500 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 10x + 10y + 10z = 500 \quad (1) \\ 10x + 8y + 9z = 455 \quad (2) \\ 10x + 7y + 8z = 425 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) - (2) : 2y + z = 45 \quad (3) \\ (2) - (3) : y + z = 30 \quad (4) \end{cases}$$

$(3) - (4) : \boxed{y = 15}$

$$\begin{cases} y = 15 \\ y + z = 30 \end{cases} \Longrightarrow \quad 15 + z = 30 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{z = 15}$$

$$\begin{cases} y = 15 \\ z = 15 \\ x + y + z = 50 \end{cases} \Longrightarrow \quad x + 15 + 15 = 50 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 20}$$

Par conséquent, **le devis de l'électricien comprend 20 interrupteurs, 15 prises et 15 ampoules économiques.**