

Bac A-ABI Cameroun 2021

Durée : 3 heures

Coefficient : 2

Exercice 1 (5 points)

Pour chacune des questions ci-après, quatre réponses vous sont proposées ; une seule est juste. Vous porterez sur la feuille de composition le numéro de la question ainsi que la lettre correspondant à la réponse juste.

- 1- Dans \mathbb{R}^2 , le système $\begin{cases} \ln(xy) = 3 \\ 2(\ln x) - 3(\ln y) = -4 \end{cases}$ a pour ensemble solution :
 a) $S = \{(2; 1)\}$; b) $S = \{(0; \ln 2)\}$; c) $S = \{(e; e^2)\}$; d) $S = \{(1; \frac{1}{2})\}$. **1 pt**
- 2- La dérivée de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (x+2)e^{x-2}$ est la fonction f' telle que $f'(x)$ est égale à :
 a) e^{x-2} ; b) $(x+3)e^{x-2}$; c) $(x+2)(x-2)e^{x-2}$; d) $(x-2)e^{x-2}$. **1 pt**
- 3- La fonction f définie de \mathbb{R} vers \mathbb{R} par $f(x) = \ln(-x+3)$ a pour ensemble de définition :
 a) $D_f =]3; +\infty[$; b) $D_f = [3; +\infty[$; c) $D_f =]-\infty; 3]$;
 d) $D_f =]-\infty; 3[$. **1 pt**
- 4- Le réel $\ln 1400$ est égal à :
 a) $\ln 1000 + \ln 400$; b) $3\ln 2 + 2\ln 5 + \ln 7$; c) $5\ln 2 + 2\ln 3 + \ln 7$;
 d) $\ln 700 \times \ln 2$. **1 pt**
- 5- On considère la série statistique double suivante :
- | | | | | |
|-------|---|------|----|------|
| x_i | 2 | 4 | 5 | 7 |
| y_i | 7 | 14,5 | 18 | 24,5 |
- Le point moyen du nuage a pour coordonnées :
 a) (16 ; 4,5) ; b) (4,5 ; 16) ; c) (4 ; 15,5) ; d) (15,5 ; 4). **1 pt**

Exercice 2 (5 points)

Une classe de T^{le} A₄ compte 75 élèves dont 30 garçons. Le conseiller d'orientation interroge tous ces élèves afin de savoir quelle profession ils aimeraient exercer après leurs études. Il ressort de cette enquête que les professions choisies par ces élèves sont : journaliste, avocat, enseignant. Les résultats de ladite enquête sont consignés dans le tableau suivant :

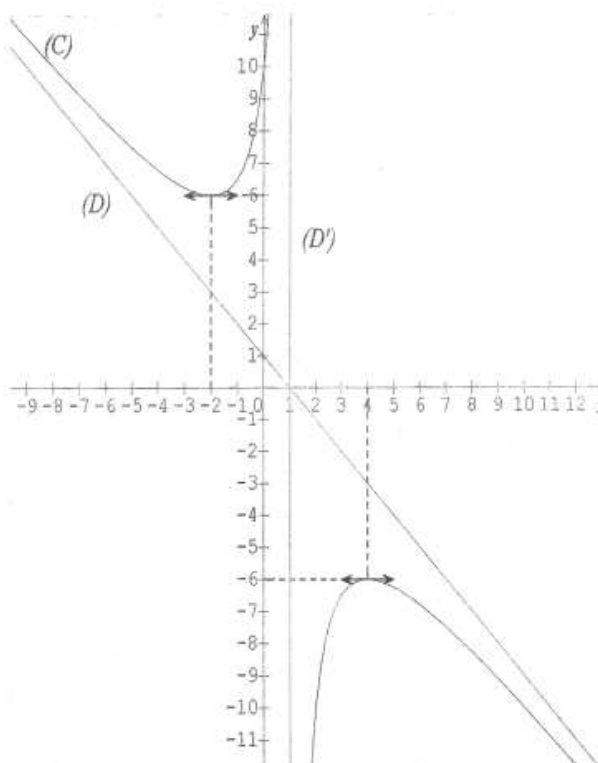
Profession \ Sexe	Journaliste	Avocat	Enseignant	Total
Garçon	12			
Fille		15		
Total	32		18	

- 1- Recopier et compléter le tableau ci-dessus. **2 pts**
- 2- On choisit au hasard 2 élèves de cette classe.
Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
(On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible).
- A : « les élèves choisis aimeraient être enseignants ». **1 pt**
- B : « les élèves choisis sont des garçons ayant opté pour la profession journaliste ». **1 pt**
- C : « les élèves choisis sont des filles qui aimeraient être avocates ». **1 pt**

Problème (10 points)

La courbe représentative (C) ci-contre est celle d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .

- 1- Par une conjecture bien fondée, donner :
- a) L'ensemble de définition de f . **0,5pt**
- b) Les limites de f en $-\infty$, $+\infty$, à gauche et à droite en 1. **1 pt**
- c) Que représente la droite (D') pour la courbe (C)? **0,5pt**
- 2- On admet que la droite (D) est asymptote oblique à (C) et qu'elle a pour équation $y = ax + b$.
- a) Déterminer a et b . **1pt**
- b) Etudier les positions relatives de (C) et (D). **0,5pt**
- 3- a) Déterminer les réels $f(-2)$, $f(4)$, $f'(-2)$ et $f'(4)$. **1 pt**
- b) Donner le sens de variation de f . **1 pt**
- c) Dresser le tableau de variation de f . **1 pt**



On suppose que $f(x) = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{x-1}$.

- 4- a) Montrer que les réels a' , b' et c' sont solutions du système :
- $$\begin{cases} 4x - 2y + z = -18 \\ 16x + 4y + z = -18 \\ 8x - y - z = 0 \end{cases}$$
- 1 pt**

b) Résoudre dans \mathbb{R}^3 le système de la question 4- a).

1,5pt

c) En déduire que $f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 10}{x-1}$.

0,5pt

5- On considère la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2015 - 9\ln(x-1)$.

Montrer que g est une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

0,5pt



Correction

Bac A-ABI Cameroun 2021

Exercice 1 (5 points)

1. Réponse c : Le système a pour ensemble solution $S = \{(e; e^2)\}$.

Dans \mathbb{R}^2 , soit le système :
$$\begin{cases} \ln(xy) = 3 \\ 2(\ln x) - 3(\ln y) = -4 \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que la seule réponse correcte est la réponse c) en remplaçant x et y dans la première équation par les valeurs proposées.

- La réponse a) est incorrecte car $\ln(xy) = \ln(2 \times 1) = \ln 2 \approx 0,69 \neq 3$.
- La réponse b) est incorrecte car $\ln(xy) = \ln(0 \times \ln 2) = \ln 0$ et $\ln 0$ n'est pas défini.
- La réponse d) est incorrecte car $\ln(xy) = \ln(1 \times \frac{1}{2}) = \ln \frac{1}{2} \approx -0,69 \neq 3$.
- **La réponse c) est correcte** car :

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln(e \times e^2) \\ &= \ln(e^3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(\ln x) - 3(\ln y) &= 2 \times \ln e - 3 \times \ln e^2 \\ &= 2 \times 1 - 3 \times 2 \\ &= 2 - 6 \\ &= -4 \end{aligned}$$

D'où $S = \{(e; e^2)\}$

Remarque : Une méthode plus longue est la résolution du système.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \ln(xy) = 3 \\ 2(\ln x) - 3(\ln y) = -4 \end{cases} &\iff \begin{cases} \ln x + \ln y = 3 \\ 2(\ln x) - 3(\ln y) = -4 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 3(\ln x) + 3(\ln y) = 9 & (1) \\ 2(\ln x) - 3(\ln y) = -4 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\implies 5(\ln x) = 5 \\ &\implies \ln x = 1 \\ &\implies x = e. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{cases} \ln x + \ln y = 3 \\ \ln x = 1 \end{cases} &\implies 1 + \ln y = 3 \\ &\implies \ln y = 2 \\ &\implies y = e^2 \end{aligned}$$

D'où $S = \{(e; e^2)\}$

2. Réponse b : $f'(x) = (x + 3)e^{x-2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + 2)' \times e^{x-2} + (x + 2) \times (e^{x-2})' && [\implies (u \times v)' = u' \times v + u \times v'] \\ &= 1 \times e^{x-2} + (x + 2) \times (x - 2)' \times e^{x-2} \\ &= e^{x-2} + (x + 2) \times 1 \times e^{x-2} \\ &= e^{x-2} + (x + 2)e^{x-2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [1 + (x + 2)] e^{x-2} \\
&= (x + 3) e^{x-2} \\
\implies &\boxed{f'(x) = (x + 3) e^{x-2}}
\end{aligned}$$

3. Réponse d : $D_f =] - \infty ; 3[$.

Nous savons que la fonction \ln est définie sur \mathbb{R}_+^* .

Donc $\ln(-x + 3)$ est défini si $-x + 3 > 0$.

$$\begin{aligned}
-x + 3 > 0 &\iff -x > -3 \\
&\iff x < 3
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{D_f =] - \infty ; 3[}$

4. Réponse b : $\ln(1400) = 3 \ln 2 + 2 \ln 5 + \ln 7$.

La réponse a) est incorrecte car $\ln 1000 + \ln 400 = \ln(1000 \times 400) = \ln 400\,000 \neq \ln 1400$.

La réponse b) est correcte car

$$\begin{aligned}
3 \ln 2 + 2 \ln 5 + \ln 7 &= \ln 2^3 + \ln 5^2 + \ln 7 \\
&= \ln 8 + \ln 25 + \ln 7 \\
&= \ln(8 \times 25 \times 7) \\
&= \ln 1400.
\end{aligned}$$

5. Réponse b : Le point moyen G du nuage a pour coordonnées (4,5 ; 16).

$$\text{En effet, } \begin{cases} x_G = \frac{2 + 4 + 5 + 7}{4} \\ y_G = \frac{7 + 14,5 + 18 + 24,5}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x_G = 4,5 \\ y_G = 16 \end{cases}$$

D'où, les coordonnées du point moyen du nuage sont (4,5 ; 16).

Exercice 2 (5 points)

1. Tableau complété résumant les résultats de l'enquête.

Total général : 75

Total garçon : 30

Total fille : $75 - 30 = 45$

Fille - Journaliste : $32 - 12 = 20$

Total avocat : $75 - (32 + 18) = 75 - 50 = 25$

Fille - Enseignant : $45 - (20 + 15) = 45 - 35 = 10$

Garçon - Avocat : $25 - 15 = 10$

Garçon - Enseignant : $18 - 10 = 8$

	Journaliste	Avocat	Enseignant	Total
Garçon	12	10	8	30
Fille	20	15	10	45
Total	32	25	18	75

2. On choisit au hasard 2 élèves de cette classe.

Les événements élémentaires sont équiprobables.

Le nombre de choix possibles de 2 élèves parmi 75 est donné par $C_{75}^2 = \binom{75}{2} = \frac{75 \times 74}{2} = 2775$.

Soit l'événement A = "les élèves choisis aimeraient être enseignants".

Le nombre de choix de 2 élèves parmi 18 est donné par $C_{18}^2 = \binom{18}{2} = \frac{18 \times 17}{2} = 153$.

Par conséquent,
$$P(A) = \frac{153}{2775} = \frac{51}{925}$$

Soit l'événement B = "les élèves choisis sont des garçons ayant opté pour la profession journaliste".

Le nombre de choix de 2 élèves parmi 12 est donné par
$$C_{12}^2 = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66.$$

Par conséquent,
$$P(B) = \frac{66}{2775} = \frac{22}{925}$$

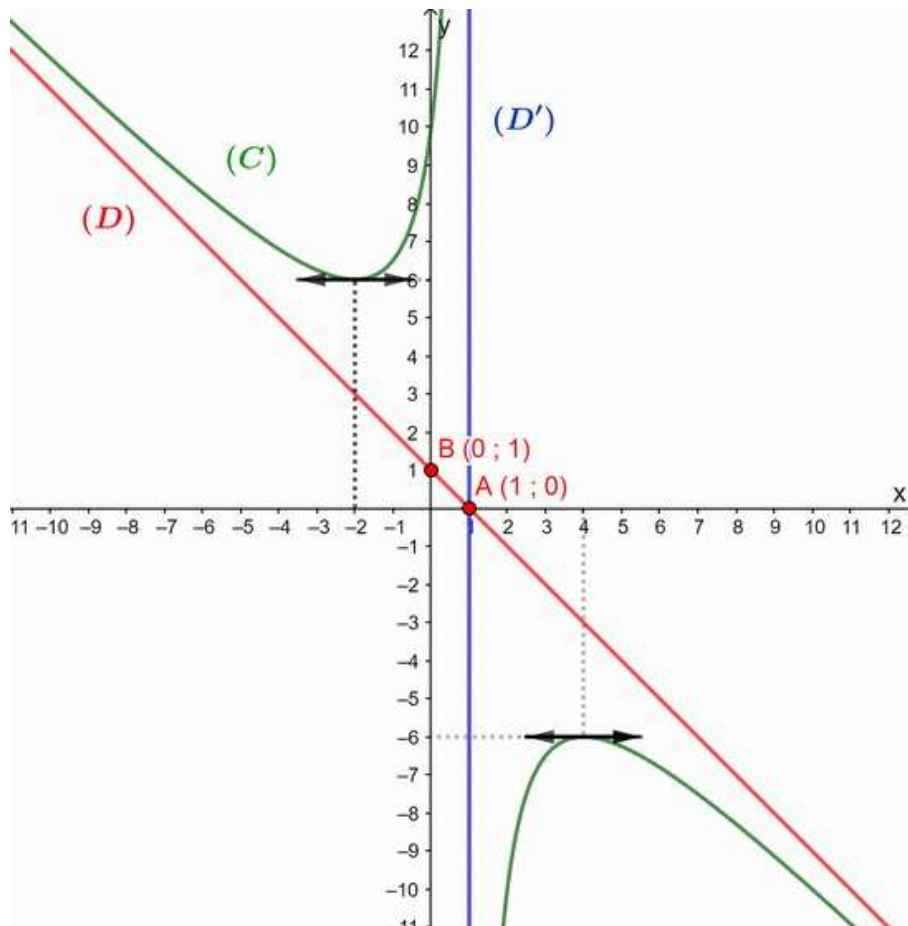
Soit l'événement C = "les élèves choisis sont des filles qui aimeraient être avocates".

Le nombre de choix de 2 élèves parmi 15 est donné par
$$C_{15}^2 = \binom{15}{2} = \frac{15 \times 14}{2} = 105.$$

Par conséquent,
$$P(C) = \frac{105}{2775} = \frac{7}{185}$$

Problème (10 points)

La courbe représentative (C) ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur \mathbb{R} .



1. Les réponses ci-après ne demandent pas ou peu de commentaires. Elles s'obtiennent par une lecture graphique.

1. a) L'ensemble de définition de f est
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

1. b) •
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

1. c) La droite (D') d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe (C) en 1.

2. On admet que la droite (D) est une asymptote oblique à (C) et qu'elle admet pour équation : $y = ax + b$.

2. a) Les points A (1; 0) et B (0; 1) appartiennent à la droite (D).
Leurs coordonnées vérifient donc l'équation de (D).

$$\begin{aligned} \begin{cases} A(1; 0) \in (D) \\ B(0; 1) \in (D) \end{cases} &\iff \begin{cases} 0 = a \times 1 + b \\ 1 = a \times 0 + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ b = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + 1 = 0 \\ b = 1 \end{cases} \\ &\iff \boxed{\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}} \end{aligned}$$

D'où l'équation réduite de l'asymptote oblique (D) est $\boxed{y = -x + 1}$.

2. b) La courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.
La courbe (C) est en dessous de la droite (D) sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

3. a) • $f(-2) = 6$.

• $f(4) = -6$.

• $f' / i (-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 2.
Cette tangente à la courbe (C) est parallèle à l'axe des abscisses.

Son coefficient directeur est donc nul.

D'où $f' / i (-2) = 0$.

• $f' / i (4)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 4.
Cette tangente à la courbe (C) est parallèle à l'axe des abscisses.

Son coefficient directeur est donc nul.

D'où $f' / i (4) = 0$.

3. b) Graphiquement, nous observons que la fonction f est
- décroissante sur les intervalles $]-\infty; -2]$ et $[4; +\infty[$
- croissante sur les intervalles $[-2; 1[$ et $]1; 4]$.

3. c) Dressons le tableau de variations de f .

x	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +		+ 0 -	
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	$+\infty$	\nearrow	$-\infty$
		6		-6	$-\infty$

4. On suppose que $f(x) = \frac{a'x^2 + b'x + c'}{x - 1}$

4. a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(a'x^2 + b'x + c')' \times (x-1) - (a'x^2 + b'x + c') \times (x-1)'}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{(2a'x + b') \times (x-1) - (a'x^2 + b'x + c') \times 1}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{(2a'x^2 - 2a'x + b'x - b') - (a'x^2 + b'x + c')}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{2a'x^2 - 2a'x + b'x - b' - a'x^2 - b'x - c'}{(x-1)^2} \\
 &= \frac{a'x^2 - 2a'x - b' - c'}{(x-1)^2} \\
 \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{a'x^2 - 2a'x - b' - c'}{(x-1)^2}}
 \end{aligned}$$

Dès lors, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} f(-2) = 6 \\ f(4) = -6 \\ f'(-2) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a' \times (-2)^2 + b' \times (-2) + c'}{-2 - 1} = 6 \\ \frac{a' \times 4^2 + b' \times 4 + c'}{4 - 1} = -6 \\ \frac{a' \times (-2)^2 - 2a' \times (-2) - b' - c'}{(-2 - 1)^2} = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4a' - 2b' + c'}{-3} = 6 \\ \frac{16a' + 4b' + c'}{3} = -6 \\ \frac{4a' + 4a' - b' - c'}{9} = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} 4a' - 2b' + c' = -18 \\ 16a' + 4b' + c' = -18 \\ 8a' - b' - c' = 0 \end{cases}}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, les réels a' , b' et c' sont solutions du système $\begin{cases} 4x - 2y + z = -18 \\ 16x + 4y + z = -18 \\ 8x - y - z = 0 \end{cases}$

4. b) Résolvons dans \mathbb{R}^3 le système $\begin{cases} 4x - 2y + z = -18 \\ 16x + 4y + z = -18 \\ 8x - y - z = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 4x - 2y + z = -18 \\ 16x + 4y + z = -18 \\ 8x - y - z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + z = -18 \\ 16x + 4y + z = -18 \\ z = 8x - y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y + 8x - y = -18 \\ 16x + 4y + 8x - y = -18 \\ z = 8x - y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 3y = -18 \\ 24x + 3y = -18 \\ z = 8x - y \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = -6 & (1) \\ 8x + y = -6 & (2) \end{cases} \quad (1) + (2) \Leftrightarrow 12x = -12 \\
 &\Leftrightarrow \boxed{x = -1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 8x + y = -6 \\ x = -1 \end{cases} \implies -8 + y = -6 \implies \boxed{y = 2}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 8x - y \end{cases} \implies z = -8 - 2 \implies \boxed{z = -10}$$

Par conséquent, l'ensemble solution du système est $\boxed{S = \{(-1; 2; -10)\}}$.

4.) Puisque nous avons montré dans la question 4. a) que les réels a' , b' et c' sont solutions de ce système, nous en déduisons que $(a' ; b' ; c') = (-1; 2; -10)$.

Il s'ensuit que $\boxed{f(x) = \frac{-x^2 + 2x - 10}{x - 1}}$.

5. On considère la fonction g définie sur $]1; +\infty[$ par $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2015 - 9\ln(x - 1)$

La fonction g est dérivable sur $]1; +\infty[$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2} \times (x^2)' + x' + 2015' - 9 \times (\ln(x - 1))' \\ &= -\frac{1}{2} \times 2x + 1 + 0 - 9 \times \frac{1}{x - 1} \\ &= -x + 1 - \frac{9}{x - 1} \\ &= \frac{(-x + 1)(x - 1) - 9}{x - 1} \\ &= \frac{-x^2 + x + x - 1 - 9}{x - 1} \\ &= \frac{-x^2 + 2x - 10}{x - 1} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\implies \boxed{\forall x \in]1; +\infty[, g'(x) = f(x)}$$

Nous en déduisons que g est une primitive de f sur $]1; +\infty[$.